

桩的模糊随机可靠性分析

吕玺琳¹, 吕 龙², 吕恩琳³

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 西南交通大学峨眉校区 土木工程系, 四川 峨眉山 614202; 3. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400030)

摘 要: 利用一次二阶矩法, 考虑可靠性分析模型中随机参数的模糊性, 建立了模糊随机可靠性分析模型。利用分解定理, 取一系列 λ 截集, 将模糊数转换为一系列区间数进行运算, 得到了一种模糊随机可靠度的计算方法。将该法应用到桩的可靠性分析中, 实例表明, 该方法是合理实用的。

关 键 词: 一次二阶矩法; 模糊随机可靠度; λ 截集; 区间数; 桩

中图分类号: O 242.1

文献标识码: A

Fuzzy stochastic reliability analysis of pile foundation

LÜ Xi-lin¹, LÜ Long², LÜ En-lin³

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Civil Engineering, Emei Campus, Southwest Jiaotong University, Sichuan Emei 614202, China;

3. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Considering the fuzzy uncertainties of the parameters of stochastic variables, a fuzzy stochastic reliability analysis model is derived based on first-order second-moment method (FOSM). By introducing λ cut set, fuzzy numbers are converted into a series of interval numbers; by use of which, fuzzy stochastic reliability is calculated. The proposed method is employed to the reliability analysis of pile foundation. Case study shows that this method is theoretically innovative and practically useful.

Key words: FOSM; fuzzy stochastic reliability; λ cut set; interval numbers; pile foundation

1 前 言

在越来越多的高层建筑和高构筑物基础工程中, 桩基础由于其承载力高、沉降小而成为大量工程应用基础形式。它不仅在沿海地区的软弱地基中得到大量应用, 而且在内陆地区也得到普遍采用。目前对桩的研究主要集中在桩基的承载力计算和沉降计算理论方面, 而对可靠度分析则关注较少, 并且现有可靠度的分析仅涉及到桩基设计中存在的随机不确定性因素, 而模糊不确定因素则很少涉及。国内外一些学者针对模糊性做了一定研究^[1-4], 但这些研究都是建立在模糊性和随机性独立的基础上的, 未考虑到随机参数的模糊性。众所周知, 随机参数的统计值对可靠性指标计算起着决定性作用。由于工程实际情况相当复杂, 模型所需参数, 尤其是土性参数受到多种因素影响, 如试验条件, 天气情况, 试验仪器等, 且常含较大人为因素, 因此,

这些参数统计值具有很大程度模糊性。模糊性是一种强不确定性因素, 它不同于随机不确定性, 它的客观存在导致常规分析模型的结果不够准确, 甚至导致常规模型在某些情况下无法处理。因此, 以常规可靠度理论为基础, 考虑随机参数中的模糊性, 建立模糊随机可靠性分析模型, 对于可靠性分析具有很大现实意义。

2 模糊可靠性分析理论

2.1 模糊可靠性分析模型的建立

传统的可靠性理论描述的可靠与失效的界限, 用极限方程 $Z = R - S = 0$ 表示, 如图 1 所示。但结构从安全到破坏很难用明确界限划分, 在可靠与失效之间有一个中间过渡状态存在, 是一个模糊范围^[5], 如图 2 所示, 这个范围表示失效逐渐发生。

模糊功能函数方程为

$$\tilde{Z} = \tilde{R} - \tilde{S} \quad (1)$$

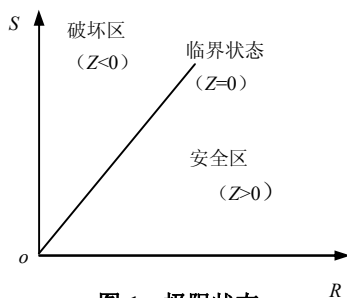


图1 极限状态
Fig.1 Limit state

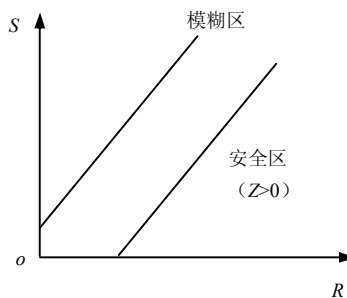


图2 模糊极限状态
Fig.2 Fuzzy limit state

目前,模糊可靠度计算理论研究中存在两条途径,一是以模糊集合描述模糊随机现象,利用模糊事件概率定义模糊可靠度,用积分法直接计算;二是以模糊随机变量为基本变量描述模糊随机现象,用 λ 水平截集法计算。第一种方法的关键在于模糊事件隶属函数的确定,第二种方法可将模糊情形转化为常规情形,且可充分利用常规可靠性分析中的各种计算方法。

2.2 模糊数学

工程中的模糊数常可以用 L - R 型模糊数表示, L - R 型模糊数 $\tilde{A}$ 的隶属函数满足

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ L(x) & x < a \\ R(x) & x > b \end{cases} \quad (2)$$

式中: $L(x)$ 为增函数,右连续, $0 \leq L(x) < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} L(x) = 0$; $R(x)$ 为减函数,左连续, $0 \leq R(x) < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$ 。

当式(2)中 $a=b$ 时, L - R 型模糊数也可用三元组 (m, α, β) 表示, m 对应隶属度为 1 的数; α, β 为模糊数的左右分布。 $L(x)$ 、 $R(x)$ 称为模糊数的左、右参照函数。工程中常用的两种参照函数是线性参照函数和正态型参照函数。线性参照函数的 $L(x)$ 、 $R(x)$ 分别为

$$\begin{cases} L(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{m-x}{\alpha}\right\} & \alpha > 0, x < m \\ R(x) = \min\left\{0, 1 - \frac{x-m}{\beta}\right\} & \beta > 0, x > m \end{cases} \quad (3)$$

由于模糊数的直接运算比较困难,一般通过分解定理将其转换为普通集合进行计算。设 $\tilde{A}$ 为论域 U 上的模糊集合,对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 记

$$\tilde{A}_{\lambda} = \{x | x \in U, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \lambda\} \quad (4)$$

称 $\tilde{A}_{\lambda}$ 为 $\tilde{A}$ 的 λ 截集(或水平截集),称 λ 为截集水平。则模糊集合可以用普通集合表示为

$$\tilde{A} = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda \tilde{A}_{\lambda} \quad (5)$$

式(5)即为分解定理^[6],它揭示了任何模糊集合都可以用普通集合表示,任何模糊数学问题都可以通过分解定理转化为普通集合问题,即非模糊问题来处理。文中模糊数的运算即是通过分解定理转化为一系列区间数进行运算的。

3 模糊一次二阶矩中心点法

一次二阶矩法是最简单实用的近似计算可靠指标的方法,是由 A.M.Hasfer 和 C.Lind 提出的,又简称 H-L 法^[7, 8]。它仅用均值和标准差来描述所有基本随机变量的统计特征,只考虑功能函数 Taylor 级数展开式的一次项,并以随机变量相对独立为前提建立求解可靠性指标的公式。其基本原理是利用随机变量的平均值(一阶原点矩)和方差(二阶中心矩)模型分析结构可靠度,并将极限状态函数在中心点处展开,使之线性化。此法主要取决于均值和方差的取值,但这两个值常具有较大模糊性,一般地,可用 L - R 型模糊数对其进行描述。

结构模糊随机功能函数表示为

$$Z = g(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n) \quad (6)$$

在实用计算中,取极限状态方程为

$$Z \approx g(\tilde{m}_{X_1}, \tilde{m}_{X_2}, \dots, \tilde{m}_{X_n}) + \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m}_{X_i}) \frac{\partial g}{\partial X_i} \quad (7)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\tilde{m}_Z}{\tilde{\sigma}_Z} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \tilde{m}_Z \approx g(\tilde{m}_{X_1}, \tilde{m}_{X_2}, \dots, \tilde{m}_{X_n}) \\ \tilde{\sigma}_Z^2 \approx \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \bigg|_{\tilde{m}_{X_i}} \right)^2 \end{cases} \quad (9)$$

将式(8)、(9)中的模糊数通过式(5)转换为一系列区间数, 可得模糊可靠性指标各 λ 水平截集的表达式。

$$\tilde{\beta}_\lambda = [\beta_\lambda^l, \beta_\lambda^u] = \frac{\tilde{m}_{Z\lambda}}{\tilde{\sigma}_{Z\lambda}} = \left[\left(\frac{m_Z}{\sigma_Z} \right)_\lambda^l, \left(\frac{m_Z}{\sigma_Z} \right)_\lambda^u \right] \quad (10)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{m_Z}{\sigma_Z} \right)_\lambda^l = \min \frac{g(\bar{m}_{X_1}, \bar{m}_{X_2}, \dots, \bar{m}_{X_n})}{\sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \big|_{\bar{m}_{X_i}} \right)^2} \\ \left(\frac{m_Z}{\sigma_Z} \right)_\lambda^u = \max \frac{g(\bar{m}_{X_1}, \bar{m}_{X_2}, \dots, \bar{m}_{X_n})}{\sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \big|_{\bar{m}_{X_i}} \right)^2} \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\bar{m}_{X_i}$, $\bar{\sigma}_{X_i}^2$ 分别表示第 i 个模糊随机数均值和模糊方差在 λ 截集水平下对应的区间数。 $\max$ 和 $\min$ 表示取区间数的上界和下界值。

根据区间可靠度计算^[9-11], 结构模糊可靠度在 λ 水平截集下 $P_{r\lambda}$ 值为

$$P_{r\lambda} = \frac{1}{\beta_\lambda^u - \beta_\lambda^l} \left\{ \beta_\lambda^u \phi(\beta_\lambda^u) - \beta_\lambda^l \phi(\beta_\lambda^l) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{(\beta_\lambda^u)^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{(\beta_\lambda^l)^2}{2}\right) \right] \right\} \quad (12)$$

因此, 模糊可靠度的估计值为

$$P_r = \int_0^1 P_{r\lambda} d\lambda \quad (13)$$

同时, 也可近似表示为

$$P_r \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{r\lambda_i} \quad (14)$$

4 桩的模糊随机可靠度分析

桩的极限状态方程可为^[12]

$$Z = Q_{su} + Q_{pu} - Q \quad (15)$$

$$\begin{cases} Q_{su} = \sum U_i L_i q_{sui} \\ Q_{pu} = A_p q_{pu} = A_p (\zeta_c c N_c + \zeta_q \gamma h N_q) \end{cases}$$

式中: Q_{su} 为桩侧摩阻力; Q_{pu} 为桩端阻力; q_{sui} 为桩周第 i 层土的极限侧阻力; q_{pu} 为桩端处土层的极限端阻力; N_c 、 N_q 分别表示反映土凝聚力和基础埋深影响承载力系数; ζ_c 、 ζ_q 分别为形状系数; c 土的凝聚力; h 桩的入土深度; U_i 为桩身截面周长; L_i 为第 i 层土的厚度; A_p 为桩端横截面全面积; Q 为作用在桩顶的力。

因此, 桩极限状态表示为

$$Z = g(U_i, L_i, q_{sui}, A_p, \zeta_c, c, N_c, N_q, \zeta_q, \gamma, h, Q) \quad (16)$$

式中: N_c 、 N_q 均可表示为摩擦角 φ 的函数; q_{sui} 在黏性土中与土的静止土压力系数 K 有关。根据各参数不确定程度以及对可靠性指标值影响的大小, 可将模型中的基本变量分为模糊随机变量、随机变量和确定性变量3种量。由于可靠性指标对 c 、 φ 、 K 、 Q 均值和方差的变化较为敏感, 因此, 将 c 、 φ 、 K 以及与之相关的修正系数和 Q 视为模糊随机变量, 其他参数分别视为随机量或确定性量。用基本变量描述桩的模糊极限状态方程为

$$Z = g(\tilde{c}, \tilde{\varphi}, \tilde{K}, \tilde{Q}, a_i, b_i) \quad (17)$$

式中: a_i 为视为随机量的基本参数; b_i 为视为确定性量的基本参数。利用式(7)~(14), 即可求得桩的模糊随机可靠度。

5 算例

一打入砂层的混凝土摩擦桩如图3所示, 设其混凝土强度能满足要求, 其支承能力由土体的支承能力确定, 假设桩端面是圆形的, 则与土支承能力不足相对的应功能函数为

$$g = 2\pi RL(\gamma L/2 + q)K \tan \varphi - P \quad (18)$$

式中: R 为桩的半径; L 为桩入土深度; q 为表面附加荷载; K 为土的侧压力系数; φ 为土的平均内摩擦角; P 为作用在桩顶的力; γ 为土体重度。

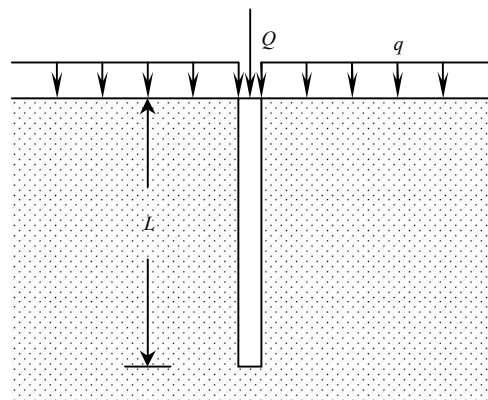


图3 摩擦桩示意图^[13]

Fig.3 Friction pile

设 R 、 L 、 q 和 γ 为常量, 分别为 $R=0.153$ m, $L=12.2$ m, $q=14.63$ kN/m², $\gamma=17.59$ kN/m³, $\tilde{K}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{P}$ 为模糊随机量,

$$\tilde{K} = ((1.5, 0.15, 0.225)_{LR}, (0.1, 0.01, 0.015)_{LR}),$$

$$\tilde{\varphi} = ((30^{\circ}, 3^{\circ}, 4.5^{\circ})_{LR}, (0.1, 0.01, 0.015)_{LR}),$$
$$\tilde{P}((907, 90.7, 136.05)_{LR} KN, (0.1, 0.01, 0.015)_{LR})$$

表 1 本文结果与常规结果比较
Table1 Comparison between calculated results and conventional results

模型分类	可靠性指标	可靠度
常规可靠性模型	1.649 2	0.950 4
模糊随机可靠性模型	1.531 0	0.932 4

从计算结果表 1 可看出，若忽略模糊性，将导致结果有较大偏差，而模糊性是客观存在的，因此，只有考虑模糊性才更合理。同时，可以看出，用模糊一次二阶矩法所得的模糊可靠性指标及模糊可靠度均小于不考虑模糊性时的值，因此，用此法衡量桩的可靠性更为保险。

6 结 论

桩基工程作为岩土工程的重要部分，对其进行实用化的可靠性研究是十分重要的。由于工程实际情况固有的复杂性，随机性和模糊性常同时存在，使得可靠度计算变得更加困难。

(1) 本文用模糊随机变量描述不确定性，基于一次二阶矩中心点法，建立了模糊随机可靠性分析模型。该模型充分考虑了广泛存在的模糊性和随机性两种不确定性，更加符合工程实际。

(2) 根据模糊数学的分解定理，将模糊集合的运算转换为常规集合，得到了一种模糊随机可靠度的求解方法，该法不但降低了计算的复杂性，还可以充分利用常规可靠度计算模型中的各种方法。

(3) 将提出的模型具体应用于摩擦桩的可靠性分析中，计算结果表明模糊性是不能忽略的。

参 考 文 献

[1] 李镜培, 舒翔. 竖向承载桩的模糊随机可靠度计算方法[J]. 岩土力学, 2002, 23(6): 754—756.
LI Jing-pei, SHU Xiang. Calculation method for fuzzy random reliability of vertical bearing piles[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23 (6): 754—756.

[2] 董玉革, 赵征权. 模糊可靠性分析一次二阶矩法[J]. 合肥工业大学学报, 2005, 28(9): 980—984.
DONG Yu-ge, ZHAO Zheng-quan. Fuzzy reliability analysis based on the FOSM method[J]. **Journal of Hefei University of Technology**, 2005, 28(9): 980—984.

[3] CHEN S M. Analyzing fuzzy system reliability using vague set theory[J]. **International Journal of Applied Science and Engineering**, 2003, 1(1): 82—88.

[4] DODAGOUDAR G R, VENKATACHALAM G. Reliability analysis of slopes using fuzzy sets theory[J]. **Computers and Geotechnics**, 2000, (27): 101—115.

[5] 黄洪钟. 机械结构广义强度的模糊可靠性计算理论[J]. 机械工程学报, 2001, 37(6): 106—112.
HUANG Hong-Zhong. Mechanical structure based on defining fuzzy safety state by generalized fuzzy strength[J]. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, 2001, 37(6): 106—112.

[6] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy Sets and System: Theory and Applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[7] HASFER A M, LIND N. C. Exact and invariant second-moment code format[J]. **Engineering Mechanics ASCE**, 1974, 100(1): 111—121.

[8] 张建仁, 刘扬, 许福友, 等. 结构可靠度理论及其在桥梁工程中的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003: 35—38.

[9] 吕玺琳. 结构系统模糊可靠性[硕士论文 D]. 重庆: 重庆大学, 2005.
LÜ Xi-Lin. Structural system fuzzy reliability[D]. Chongqing: Chongqing University, 2005.

[10] 郭书祥, 吕震宙. 区间运算和静力有限元[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(12): 1 249—1 254.
GUO Shu-Xiang, LÜ Zheng-zhou. Interval arithmetic and Static interval finite element method[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2001, 22(12): 1 249—1 254.

[11] 王登刚, 李杰. 计算具有区间参数结构特征值范围的一种新方法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(1): 56—61.
WANG Deng-gang, LI Jie. A new method for computing the eigenvalues bounds of structures with interval parameters[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2001, 18(1): 56—61.

[12] 桩基工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997: 36—43.

[13] 吴世伟. 结构可靠度分析[M]. 人民交通出版社, 1990: 215—216.